Алгебра, логика и элементы теории чисел на экзаменах и олимпиадах МГУ имени М. В. Ломоносова, 10 июня 2018 года

Задача 1. Сравните числа $\left(1+\dfrac{2}{3^3}\right)\left(1+\dfrac{2}{5^3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{2}{2019^3}\right)$ и $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Задача 2. Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов $x^{2011}+2011x-1$ и $x^{2011}-2011x+1$.

Задача 3. В выражении $(x^4+x^3-3x^2+x+2)^{2006}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

Задача 4. Последовательность (a_n) такова, что $a_n=n^2$ при $1\leqslant n\leqslant 5$ и при всех натуральных n выполнено равенство $a_{n+5}+a_{n+1}=a_{n+4}+a_n$. Найдите a_{2015}.

Задача 5. Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвёртый член геометрической прогрессии?

Задача 6. К каждому члену некоторой конечной последовательности подряд идущих натуральных чисел приписали справа по две цифры и получили последовательность квадратов подряд идущих натуральных чисел. Какое наибольшее число членов могла иметь эта последовательность?

Задача 7. Каково наибольшее количество последовательных натуральных чисел, у каждого из которых ровно четыре натуральных делителя (включая 1 и само число)?

Задача 8. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель этих чисел?

Задача 9. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

Задача 10. Найдите наименьшее натуральное n, для которого число n^n не является делителем числа 2008!.

Задача 11. На доске написано: «В этом предложении …% цифр делятся на 2, …% цифр делятся на 3, а …% цифр делятся и на 2, и на 3.» Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным.

Задача 12. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

Задача 13. Даны 2000 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 2000 множеств?

Задача 14. В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трёх исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причём за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку — 18 голосов, за Кукушку и Петуха — 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырёх названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

Задача 15. Алиса и Базилио играют в следующую игру: из мешка, первоначально содержащего 1331 монету, они по очереди берут монеты, причём первый ход делает Алиса и берёт 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берёт (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

Задача 16. Петя закрасил одну клетку прямоугольника. Саша может закрашивать другие клетки этого прямоугольника по следующему правилу: можно красить любую клетку, у которой нечётное число закрашенных соседей (по стороне). Сможет ли Саша закрасить все клетки прямоугольника (независимо от того, какую клетку выбрал Петя), если размеры прямоугольника: а) 8×9 клеток; б) 8×10 клеток?