Числовые функции и математический анализ в школьной программе, их использование в экзаменах и олимпиадах

И. А. Шейпак

10 июня, 2018, Москва

Функция

1. Формула
2. Область определения
3. Область значений
4. Другие свойства

Функция

1. Формула
2. Область определения
3. Область значений
4. Другие свойства

Функция

1. Формула
2. Область определения
3. Область значений
4. Другие свойства

Функция

1. Формула
2. Область определения
3. Область значений
4. Другие свойства

Основные свойства

1. Чётность-нечётность функции
2. Периодичность
3. Нули функции и промежутки знакопостоянства
4. Монотонность
5. Точки экстремума и экстремумы функции
6. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве
7. Выпуклость

Основные свойства

1. Чётность-нечётность функции
2. Периодичность
3. Нули функции и промежутки знакопостоянства
4. Монотонность
5. Точки экстремума и экстремумы функции
6. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве
7. Выпуклость

Основные свойства

1. Чётность-нечётность функции
2. Периодичность
3. Нули функции и промежутки знакопостоянства
4. Монотонность
5. Точки экстремума и экстремумы функции
6. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве
7. Выпуклость

Основные свойства

1. Чётность-нечётность функции
2. Периодичность
3. Нули функции и промежутки знакопостоянства
4. Монотонность
5. Точки экстремума и экстремумы функции
6. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве
7. Выпуклость

Основные свойства

1. Чётность-нечётность функции
2. Периодичность
3. Нули функции и промежутки знакопостоянства
4. Монотонность
5. Точки экстремума и экстремумы функции
6. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве
7. Выпуклость

Основные свойства

1. Чётность-нечётность функции
2. Периодичность
3. Нули функции и промежутки знакопостоянства
4. Монотонность
5. Точки экстремума и экстремумы функции
6. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве
7. Выпуклость

Основные свойства

1. Чётность-нечётность функции
2. Периодичность
3. Нули функции и промежутки знакопостоянства
4. Монотонность
5. Точки экстремума и экстремумы функции
6. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве
7. Выпуклость

Области определения и значения I

Химический, 2001

Решите уравнение $\arcsin \frac{6x-7}{2x-1} = 2\pi - \pi x$

$-1 \leqslant \frac{6x-7}{2x-1} \leqslant 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2\pi - \pi x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Ответ

$\frac{3}{2}$

Области определения и значения I

Химический, 2001

Решите уравнение $\arcsin\frac{6x-7}{2x-1} = 2\pi - \pi x$

$$-1 \leqslant \frac{6x-7}{2x-1} \leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant 2\pi - \pi x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Ответ

$\frac{3}{2}$

Области определения и значения I

Химический, 2001

Решите уравнение $\arcsin \frac{6x-7}{2x-1} = 2\pi - \pi x$

$-1 \leqslant \frac{6x-7}{2x-1} \leqslant 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2\pi - \pi x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

Ответ

$\frac{3}{2}$

Области определения и значения II

Экономический, 1993

Найдите периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x+2|\arcsin(y-1)^2 \leqslant \pi(x+2), \\ 2|y-1|-x \geqslant 0. \end{cases}$$

$0 \leqslant (y-1)^2 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \arcsin(y-1)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$

Области определения и значения II

Экономический, 1993

Найдите периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x+2|\arcsin(y-1)^2 \leqslant \pi(x+2), \\ 2|y-1|-x \geqslant 0. \end{cases}$$

$0 \leqslant (y-1)^2 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \arcsin(y-1)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$

Из первого неравенства получаем

$0 \leqslant y \leqslant 2 \quad x \geqslant -2$

Ответ:

$10 + 2\sqrt{5}.$

Из первого неравенства получаем

$0 \leqslant y \leqslant 2 \quad x \geqslant -2$

Ответ:

$10 + 2\sqrt{5}.$

Области определения и значения III

Решите неравенство $\cos^2(x+1)\lg(9-2x-x^2) \geqslant 1$

$\cos^2(x+1)\lg(10-(x+1)^2) \geqslant 1$

$0 \leqslant \cos^2(x+1) \leqslant 1 \quad \lg(10-(x+1)^2) \leqslant 1 \Rightarrow x = -1.$

Области определения и значения III

Решите неравенство $\cos^2(x+1)\lg(9-2x-x^2)\geqslant 1$

$\cos^2(x+1)\lg(10-(x+1)^2)\geqslant 1$

$0\leqslant\cos^2(x+1)\leqslant 1 \quad \lg(10-(x+1)^2)\leqslant 1 \Rightarrow x=-1.$

Области определения и значения III

Решите неравенство $\cos^2(x+1)\lg(9-2x-x^2) \geqslant 1$

$\cos^2(x+1)\lg(10-(x+1)^2) \geqslant 1$

$0 \leqslant \cos^2(x+1) \leqslant 1 \quad \lg(10-(x+1)^2) \leqslant 1 \Rightarrow x = -1.$

Области определения и значения IV

ПВГ-регионы, 2014

Найдите все значениях a, при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+a^2-a-2=0$$

имеет решение.

$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+2(a-1)\log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+a^2-3a=0$ $t=\log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$y=\frac{2x}{1+x^2}$ при положительном x меняется в пределах от нуля до единицы, получается, что t меняется в пределах $t\in(-\infty,0]$.

Области определения и значения IV

ПВГ-регионы, 2014

Найдите все значениях a, при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + a^2 - a - 2 = 0$$

имеет решение.

$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + a^2 - 3a = 0$ $t = \log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$y = \frac{2x}{1+x^2}$ при положительном x меняется в пределах от нуля до единицы, получается, что t меняется в пределах $t \in (-\infty, 0]$.

Области определения и значения IV

ПВГ-регионы, 2014

Найдите все значениях a, при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+a^2-a-2=0$$

имеет решение.

$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+2(a-1)\log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+a^2-3a=0$ $t=\log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$y=\frac{2x}{1+x^2}$ при положительном x меняется в пределах от нуля до единицы, получается, что t меняется в пределах $t\in(-\infty,0]$.

Области определения и значения IV

ПВГ-регионы, 2014

Найдите все значениях a, при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+a^2-a-2=0$$

имеет решение.

$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+2(a-1)\log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+a^2-3a=0$ $t=\log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$y=\frac{2x}{1+x^2}$ при положительном x меняется в пределах от нуля до единицы, получается, что t меняется в пределах $t\in(-\infty,0]$.

Продолжение.

Формулировка в терминах переменной t:

«Найти все значения параметра a, при которых уравнение $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 3a = 0$ имеет решения при $t \in (-\infty, 0]$».

Это возможно, если корни разного знака, или хотя бы один из корней равен нулю, или оба корня отрицательны. Первая и вторая ситуации описываются условием $a(a-3) \leqslant 0$, третья — системой неравенств:

$$\begin{cases} (a-1)^2 - a(a-3) = a+1 \geqslant 0, \\ 1 - a \leqslant 0, \\ a(a-3) > 0. \end{cases}$$

Ответ: $a \in [0; \infty)$

Продолжение.

Формулировка в терминах переменной t:

«Найти все значения параметра a, при которых уравнение $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 3a = 0$ имеет решения при $t \in (-\infty, 0]$».

Это возможно, если корни разного знака, или хотя бы один из корней равен нулю, или оба корня отрицательны. Первая и вторая ситуации описываются условием $a(a-3) \leqslant 0$, третья — системой неравенств:

$$\begin{cases} (a-1)^2 - a(a-3) = a + 1 \geqslant 0, \\ 1 - a \leqslant 0, \\ a(a-3) > 0. \end{cases}$$

Ответ: $a \in [0; \infty)$

Продолжение.

Формулировка в терминах переменной t:

«Найти все значения параметра a, при которых уравнение $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 3a = 0$ имеет решения при $t \in (-\infty, 0]$».

Это возможно, если корни разного знака, или хотя бы один из корней равен нулю, или оба корня отрицательны. Первая и вторая ситуации описываются условием $a(a-3) \leqslant 0$, третья — системой неравенств:

$$\begin{cases} (a-1)^2 - a(a-3) = a + 1 \geqslant 0, \\ 1 - a \leqslant 0, \\ a(a-3) > 0. \end{cases}$$

Ответ: $a \in [0; \infty)$

Области значения V

ЛОМ-заочный, 2012

Найдите множество значений функции

$$y(x) = \operatorname{tg}^2 2x + 6\sin x - 2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 2x}.$$

$t = \sin x$. Так как $\cos^2 2x = 1 - 2\sin^2 x \neq 0$, то $t \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(t) = 4t^2 + 6t - 3 = 4(t + \frac{3}{4})^2 - \frac{21}{4}$ при условии $t \in [-1; 1]$, $t \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Области значения V

ЛОМ-заочный, 2012

Найдите множество значений функции

$$y(x) = \operatorname{tg}^2 2x + 6\sin x - 2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 2x}.$$

$t = \sin x$. Так как $\cos^2 2x = 1 - 2\sin^2 x \neq 0$, то $t \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(t) = 4t^2 + 6t - 3 = 4(t + \frac{3}{4})^2 - \frac{21}{4}$ при условии $t \in [-1; 1]$, $t \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Области значения V

ЛОМ-заочный, 2012

Найдите множество значений функции

$$y(x) = \operatorname{tg}^2 2x + 6\sin x - 2\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 2x}.$$

$t = \sin x$. Так как $\cos^2 2x = 1 - 2\sin^2 x \neq 0$, то $t \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(t) = 4t^2 + 6t - 3 = 4(t + \frac{3}{4})^2 - \frac{21}{4}$ при условии $t \in [-1; 1]$, $t \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Области значения V продолжение

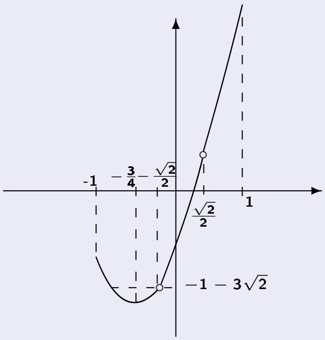
Так как $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 - 3\sqrt{2} < -5 = f(-1)$, то значение $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ принимается в точке, симметричной точке $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ относительно $-\dfrac{3}{4}$ (а именно, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})$, при этом $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > -1$). Значение $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3\sqrt{2} - 1$ принимается функцией $f(t)$ ровно один раз при $t \in [-1, 1]$.

Т.к. $f(-1) = -5$, $f(1) = 7$, $f(-\frac{3}{4}) = -\frac{21}{4}$, то значения функции f образуют множество $\left[-\frac{21}{4}; 7\right] \setminus \{3\sqrt{2} - 1\}$.

Области значения V продолжение

Так как $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 - 3\sqrt{2} < -5 = f(-1)$, то значение $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ принимается в точке, симметричной точке $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ относительно $-\dfrac{3}{4}$ (а именно, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})$, при этом $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > -1$). Значение $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3\sqrt{2} - 1$ принимается функцией $f(t)$ ровно один раз при $t \in [-1, 1]$.

Т.к. $f(-1) = -5$, $f(1) = 7$, $f(-\frac{3}{4}) = -\frac{21}{4}$, то значения функции f образуют множество $\left[-\frac{21}{4}; 7\right] \setminus \{3\sqrt{2} - 1\}$.


-1
$-\frac{3}{4}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-1-3\sqrt{2}$

Монотонность, нечётность I

Химический, 1989

Решите уравнение
$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$

Рассмотрим функцию

$f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})\upuparrows$ при $t>0$ и нечётна $\Rightarrow f\upuparrows$ при всех t.

$f(2x+1)=-f(3x)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)\Leftrightarrow 2x+1=-3x$

Ответ:

$x=-\frac{1}{5}$.

Монотонность, нечётность I

Химический, 1989

Решите уравнение

$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$

Рассмотрим функцию

$f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})\upuparrows$ при $t>0$ и нечётна $\Rightarrow f\upuparrows$ при всех t.

$f(2x+1)=-f(3x)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)\Leftrightarrow 2x+1=-3x$

Ответ:

$x=-\frac{1}{5}$.

Монотонность, нечётность I

Химический, 1989

Решите уравнение

$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$

Рассмотрим функцию

$f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})\upuparrows$ при $t>0$ и нечётна $\Rightarrow f\upuparrows$ при всех t.

$f(2x+1)=-f(3x)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)\Leftrightarrow 2x+1=-3x$

Ответ:

$x=-\frac{1}{5}$.

Монотонность, нечётность I

Химический, 1989

Решите уравнение

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$$

Рассмотрим функцию

$f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})\upuparrows$ при $t>0$ и нечётна $\Rightarrow f\upuparrows$ при всех t.

$$f(2x+1)=-f(3x)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)\Leftrightarrow 2x+1=-3x$$

Ответ:

$x=-\frac{1}{5}$.

Монотонность, нечётность II

Ломоносов, 2018

Найдите наибольшее значение функции
$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin \sin x$.

Рассмотрим функцию

$g(t) = 2t \cos t + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin t$, $t = \sin x \in [-1; 1]$. Функция g нечётна и $g'(t) = -2t \sin t + \frac{\pi}{2} \cos t$.

$g'(t) > 0$ при $0 \leqslant t < \frac{\pi}{4}$, $g'(t) < 0$ при $\frac{\pi}{4} < t \leqslant 1$ и $g(1) > 0$.

Ответ: $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$.

Монотонность, нечётность II

Ломоносов, 2018

Найдите наибольшее значение функции
$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)\sin\sin x$.

Рассмотрим функцию

$g(t) = 2t\cos t + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)\sin t$, $t = \sin x \in [-1; 1]$. Функция g нечётна и $g'(t) = -2t\sin t + \frac{\pi}{2}\cos t$.

$g'(t) > 0$ при $0 \leqslant t < \frac{\pi}{4}$, $g'(t) < 0$ при $\frac{\pi}{4} < t \leqslant 1$ и $g(1) > 0$.

Ответ: $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$.

Монотонность, нечётность II

Ломоносов, 2018

Найдите наибольшее значение функции
$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin \sin x.$

Рассмотрим функцию

$g(t) = 2t \cos t + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin t,\ t = \sin x \in [-1; 1]$. Функция g нечётна и $g'(t) = -2t \sin t + \frac{\pi}{2} \cos t$.

$g'(t) > 0$ при $0 \leqslant t < \frac{\pi}{4}$, $g'(t) < 0$ при $\frac{\pi}{4} < t \leqslant 1$ и $g(1) > 0$.

Ответ: $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-2}{\sqrt{2}}$.

Монотонность, нечётность II

Ломоносов, 2018

Найдите наибольшее значение функции
$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin \sin x$.

Рассмотрим функцию

$g(t) = 2t \cos t + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin t$, $t = \sin x \in [-1; 1]$. Функция g нечётна и $g'(t) = -2t \sin t + \frac{\pi}{2} \cos t$.

$g'(t) > 0$ при $0 \leqslant t < \frac{\pi}{4}$, $g'(t) < 0$ при $\frac{\pi}{4} < t \leqslant 1$ и $g(1) > 0$.

Ответ: $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$.

Та же идея: $f(t_1) = f(t_2)$ и f — строго монотонна.

Пробный вариант ЕГЭ

Найдите все значение параметра a, для каждого из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трех различных решений.

$f(t) = t^5 + t \upuparrows$

$f(x^2) = f(2|x| - a)$.

Ответ:

$0 < a < 1$.

Та же идея: $f(t_1) = f(t_2)$ и f — строго монотонна.

Пробный вариант ЕГЭ

Найдите все значение параметра a, для каждого из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трех различных решений.

$f(t) = t^5 + t \upuparrows$

$f(x^2) = f(2|x| - a)$.

Ответ:

$0 < a < 1$.

Та же идея: $f(t_1) = f(t_2)$ и f — строго монотонна.

Пробный вариант ЕГЭ

Найдите все значение параметра a, для каждого из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трех различных решений.

$f(t) = t^5 + t \upuparrows$

$f(x^2) = f(2|x| - a)$.

Ответ:

$0 < a < 1$.

Область значений и монотонность

Мех-мат., 1993

Найти все значения a, при которых уравнение
$4^x + (a^2+5)\cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$ не имеет решений.

Рассмотрим функцию

$f(t) = t^2 + (a^2+5)t + 9 - a^2$, $D(f) = (0; +\infty)$, $f \upuparrows$
$E(f) = (f(0); +\infty)$

Ответ:

$f(0) \geqslant 0$: $a \in [-3; 3]$.

Область значений и монотонность

Мех-мат., 1993

Найти все значения a, при которых уравнение
$4^x + (a^2 + 5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$ не имеет решений.

Рассмотрим функцию

$f(t) = t^2 + (a^2 + 5)t + 9 - a^2$, $D(f) = (0; +\infty)$, $f \upuparrows$
$E(f) = (f(0); +\infty)$

Ответ:

$f(0) \geqslant 0$: $a \in [-3; 3]$.

Область значений и монотонность

Мех-мат., 1993

Найти все значения a, при которых уравнение
$4^x + (a^2+5)\cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$ не имеет решений.

Рассмотрим функцию

$f(t) = t^2 + (a^2+5)t + 9 - a^2$, $D(f) = (0; +\infty)$, $f \upuparrows$
$E(f) = (f(0); +\infty)$

Ответ:

$f(0) \geqslant 0$: $a \in [-3; 3]$.

Монотонность, итерации

Почвоведения, 1984

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3a + \sqrt{3a + 2x - x^2}} = 2x - x^2$ имеет решение.

$f(t) = \sqrt{3a + t}$, $t = 2x - x^2$

Теорема. Пусть $f \upuparrows$. Тогда $f(f(t)) = t \Leftrightarrow f(t) = t$.

Ответ:

$a \in \left[-\frac{1}{12}; 0\right]$

Монотонность, итерации

Почвоведения, 1984

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}} = 2x - x^2$ имеет решение.

$f(t) = \sqrt{3a+t}$, $t = 2x - x^2$

Теорема. Пусть $f \upuparrows$. Тогда $f(f(t)) = t \Leftrightarrow f(t) = t$.

Ответ:

$a \in \left[-\frac{1}{12}; 0\right]$

Монотонность, итерации

Почвоведения, 1984

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}} = 2x-x^2$ имеет решение.

$f(t) = \sqrt{3a+t}$, $t = 2x-x^2$

Теорема. Пусть $f \upuparrows$. Тогда $f(f(t)) = t \Leftrightarrow f(t) = t$.

Ответ:

$a \in \left[-\frac{1}{12}; 0\right]$

Монотонность, метод интервалов.

ПВГ, 2016

Найдите все решения неравенства
$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5)-\log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right)\left(\cos\left(x+\frac{7}{4}\right)-\cos(2x-1)\right)\cdot$
$(|x-4|-|2x-5|)\geqslant 0.$

Область определение: $x\in\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$

$\log_{\frac{\pi}{6}} t \downdownarrows$, $\cos t \upuparrows$ (на области определения).

На области определение неравенство равносильно:

$(2x-5-7+2x)\left(x+\frac{7}{4}-2x+1\right)(4-x-2x+5)\geqslant 0 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2\left(x-\frac{11}{4}\right)\leqslant 0.$ Ответ: $\left(\frac{5}{2};\frac{11}{4}\right]\cup\{3\}.$

Монотонность, метод интервалов.

ПВГ, 2016

Найдите все решения неравенства
$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5)-\log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right)\left(\cos\left(x+\frac{7}{4}\right)-\cos(2x-1)\right)\cdot$
$(|x-4|-|2x-5|)\geqslant 0.$

Область определение: $x\in\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$

$\log_{\frac{\pi}{6}} t \downdownarrows$, $\cos t \upuparrows$ (на области определения).

На области определение неравенство равносильно:

$(2x-5-7+2x)\left(x+\frac{7}{4}-2x+1\right)(4-x-2x+5)\geqslant 0 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2\left(x-\frac{11}{4}\right)\leqslant 0$. Ответ: $\left(\frac{5}{2};\frac{11}{4}\right]\cup\{3\}$.

Монотонность, метод интервалов.

ПВГ, 2016

Найдите все решения неравенства
$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5)-\log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right)\left(\cos\left(x+\frac{7}{4}\right)-\cos(2x-1)\right)\cdot$
$(|x-4|-|2x-5|)\geqslant 0.$

Область определение: $x\in\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$

$\log_{\frac{\pi}{6}} t \downdownarrows$, $\cos t \upuparrows$ (на области определения).

На области определение неравенство равносильно:

$(2x-5-7+2x)\left(x+\frac{7}{4}-2x+1\right)(4-x-2x+5)\geqslant 0 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2\left(x-\frac{11}{4}\right)\leqslant 0$. Ответ: $\left(\frac{5}{2};\frac{11}{4}\right]\cup\{3\}$.

Непрерывность в точке, итерации.

Саммат, 2018

Известно, что функция f непрерывна в точке $x = 0$ и для любых действительных x удовлетворяет уравнению $20f(18x) = f(x) + x^2$. Сколько существует целых x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) < \frac{x}{2018}?$$

1. Единственность.

Действительно, если уравнению удовлетворяют две функции f и g, то их разность $h(x) := f(x) - g(x)$ удовлетворяет уравнению

$$20h(18x) = h(x) \Leftrightarrow h(18x) = \frac{1}{20}h(x).$$

Непрерывность в точке, итерации.

Саммат, 2018

Известно, что функция f непрерывна в точке $x = 0$ и для любых действительных x удовлетворяет уравнению $20f(18x) = f(x) + x^2$. Сколько существует целых x, удовлетворяющих неравенству

$$f(x) < \frac{x}{2018}?$$

1. Единственность.

Действительно, если уравнению удовлетворяют две функции f и g, то их разность $h(x) := f(x) - g(x)$ удовлетворяет уравнению

$$20h(18x) = h(x) \Leftrightarrow h(18x) = \frac{1}{20}h(x).$$

Продолжение.

Если $h \not\equiv 0$, то существует такая точка x_0, что $h(x_0) \neq 0$. Тогда

$$h(x_0) = h\left(18\frac{x_0}{18}\right) = \frac{1}{20}h\left(\frac{x_0}{18}\right) = \ldots = \frac{1}{20^k}h\left(\frac{x_0}{18^k}\right) \to 0, \ k \to \infty.$$

Следовательно, $h(x_0) = 0$ и $h \equiv 0$.

2. Существование решения.

Найдём решение функционального уравнения в виде $f(x) = ax^2$:

$$20 \cdot a \cdot (18x)^2 = ax^2 + x^2 \Leftrightarrow 6479ax^2 = x^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6479}.$$

Неравенству

$$\frac{x^2}{6479} < \frac{x}{2018} \Leftrightarrow \frac{2018x^2 - 6479x}{2018 \cdot 6479} < 0$$

удовлетворяют целые числа $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Ещё Саммат 2015

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x+g(y)) = 20x + y + 15$. Сколько существует натуральных пар (x, y), таких, что $g(x+f(y)) + g(y+f(x)) \leqslant 10$?

1. Единственность.

2. Существование:

$$f(x) = Ax + B,\ g(x) = ax + b \Rightarrow A = 20,\ a = \frac{1}{20},\ 20b + B = 15$$

3. Ответ ($21x + 21y \leqslant 170$):

28.

Ещё Саммат 2015

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x+g(y)) = 20x + y + 15$. Сколько существует натуральных пар (x, y), таких, что $g(x+f(y)) + g(y+f(x)) \leqslant 10$?

1. Единственность.

2. Существование:

$$f(x) = Ax + B,\ g(x) = ax + b \Rightarrow A = 20,\ a = \frac{1}{20},\ 20b + B = 15$$

3. Ответ ($21x + 21y \leqslant 170$):

28.

Ещё Саммат 2015

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x+g(y)) = 20x + y + 15$. Сколько существует натуральных пар (x, y), таких, что $g(x+f(y)) + g(y+f(x)) \leqslant 10$?

1. Единственность.

2. Существование:

$$f(x) = Ax + B,\ g(x) = ax + b \Rightarrow A = 20,\ a = \frac{1}{20},\ 20b + B = 15$$

3. Ответ ($21x + 21y \leqslant 170$):

28.

Ещё Саммат 2015

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x+g(y)) = 20x + y + 15$. Сколько существует натуральных пар (x, y), таких, что $g(x+f(y)) + g(y+f(x)) \leqslant 10$?

1. Единственность.

2. Существование:

$$f(x) = Ax + B,\ g(x) = ax + b \Rightarrow A = 20,\ a = \frac{1}{20},\ 20b + B = 15$$

3. Ответ $(21x + 21y \leqslant 170)$:

28.

Выпуклость

Ломоносов 2016

Найдите произведение всех значений x, при каждом из которых $\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$, $2^{x^2-9x+11}$, $\left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$ — арифметическая прогрессия.

$f(t) := t^{\frac{x^2-9x+11}{2}}$. Условие равносильно $\frac{f(t_1)+f(t_1)}{2} = f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$.

Но функция $f(t) = t^{\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ либо строго выпукла вверх, либо строго выпукла вниз. Поэтому либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = 1$. Оба уравнения очевидно имеют корни. По теореме Виета произведение корней равно $11 \cdot 9 = 99$. .

Выпуклость

Ломоносов 2016

Найдите произведение всех значений x, при каждом из которых $\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$, $2^{x^2-9x+11}$, $\left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$ — арифметическая прогрессия.

$f(t) := t^{\frac{x^2-9x+11}{2}}$. Условие равносильно $\frac{f(t_1)+f(t_1)}{2} = f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$.

Но функция $f(t) = t^{\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ либо строго выпукла вверх, либо строго выпукла вниз. Поэтому либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = 1$. Оба уравнения очевидно имеют корни. По теореме Виета произведение корней равно $11 \cdot 9 = 99$. .

Выпуклость

Ломоносов 2016

Найдите произведение всех значений x, при каждом из которых $\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$, $2^{x^2-9x+11}$, $\left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$ — арифметическая прогрессия.

$f(t) := t^{\frac{x^2-9x+11}{2}}$. Условие равносильно $\frac{f(t_1)+f(t_1)}{2} = f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)$.

Но функция $f(t) = t^{\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ либо строго выпукла вверх, либо строго выпукла вниз. Поэтому либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = 1$. Оба уравнения очевидно имеют корни. По теореме Виета произведение корней равно $11 \cdot 9 = 99$. .

Квадратный трёхчлен

Мех.-мат., тест 2002

Среди значений параметра φ из промежутка $[0; 2\pi]$ укажите те, для каждого из которых наибольшее значение функции $y = \cos x - \frac{3}{4}\cos\varphi + \cos(x+\varphi)$ будет максимальным.

$$y = 2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(x + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} > 0 \Rightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

при $x = -\frac{\varphi}{2}$, $\varphi = 2\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ достигается равенство и максимум.

$$\cos\frac{\varphi}{2} < 0 \Rightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

при $x = \pi - \frac{\varphi}{2}$, $\varphi = 2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ достигается равенство и

Квадратный трёхчлен

Мех.-мат., тест 2002

Среди значений параметра φ из промежутка $[0; 2\pi]$ укажите те, для каждого из которых наибольшее значение функции $y = \cos x - \frac{3}{4}\cos\varphi + \cos(x+\varphi)$ будет максимальным.

$$y = 2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(x + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} > 0 \Rightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

при $x = -\frac{\varphi}{2}$, $\varphi = 2\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ достигается равенство и максимум.

$$\cos\frac{\varphi}{2} < 0 \Rightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

при $x = \pi - \frac{\varphi}{2}$, $\varphi = 2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ достигается равенство и

Квадратный трёхчлен

Мех.-мат., тест 2002

Среди значений параметра φ из промежутка $[0; 2\pi]$ укажите те, для каждого из которых наибольшее значение функции $y = \cos x - \frac{3}{4}\cos\varphi + \cos(x+\varphi)$ будет максимальным.

$$y = 2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(x + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} > 0 \Rightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

при $x = -\frac{\varphi}{2}$, $\varphi = 2\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ достигается равенство и максимум.

$$\cos\frac{\varphi}{2} < 0 \Rightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

при $x = \pi - \frac{\varphi}{2}$, $\varphi = 2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ достигается равенство и

Квадратный трёхчлен

Мех.-мат., тест 2002

Среди значений параметра φ из промежутка $[0; 2\pi]$ укажите те, для каждого из которых наибольшее значение функции $y = \cos x - \frac{3}{4}\cos\varphi + \cos(x+\varphi)$ будет максимальным.

$$y = 2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(x+\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} > 0 \Rightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

при $x = -\frac{\varphi}{2}$, $\varphi = 2\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ достигается равенство и максимум.

$$\cos\frac{\varphi}{2} < 0 \Rightarrow y \leqslant -\frac{3}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2} - 2\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4}$$

при $x = \pi - \frac{\varphi}{2}$, $\varphi = 2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ достигается равенство и

Квадратный трёхчлен

Мех.-мат., устный 2004

Найдите наименьшее значение выражения $(x-y)^2+3(y-z)^2-5(z-x)^2$, если $x, y, z \in [-1;1]$.

$f=-4x^2+\ldots$, $f=4y^2+\ldots$, $f=-2z^2+\ldots \Rightarrow$
$f=f(y)$

Достаточно рассмотреть $x=\pm1$, $z=\pm1$

Ответ:

-17

Квадратный трёхчлен

Мех.-мат., устный 2004

Найдите наименьшее значение выражения
$(x-y)^2+3(y-z)^2-5(z-x)^2$, если $x, y, z \in [-1; 1]$.

$f = -4x^2 + \ldots,\ f = 4y^2 + \ldots,\ f = -2z^2 + \ldots \Rightarrow$
$f = f(y)$

Достаточно рассмотреть $x = \pm 1$, $z = \pm 1$

Ответ:

-17

Квадратный трёхчлен

Мех.-мат., устный 2004

Найдите наименьшее значение выражения
$(x-y)^2+3(y-z)^2-5(z-x)^2$, если $x, y, z \in [-1; 1]$.

$f = -4x^2 + \ldots,\ f = 4y^2 + \ldots,\ f = -2z^2 + \ldots \Rightarrow$
$f = f(y)$

Достаточно рассмотреть $x = \pm 1$, $z = \pm 1$

Ответ:

-17

Ввести функцию

Сравните числа

$10^{\sqrt{11}}$ и $11^{\sqrt{10}}$

То же самое, что сравнить числа

$\sqrt{11}\ln 10$ и $\sqrt{10}\ln 11 \Leftrightarrow \dfrac{\ln 10}{\sqrt{10}}$ и $\dfrac{\ln 11}{\sqrt{11}}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}(2 - lnx)$$

$x_0 = e^2$ — точка максимума, на $(e^2; +\infty)$ $f \downdownarrows \Rightarrow f(10) > f(11)$.

Ввести функцию

Сравните числа

$10^{\sqrt{11}}$ и $11^{\sqrt{10}}$

То же самое, что сравнить числа

$\sqrt{11}\ln 10$ и $\sqrt{10}\ln 11 \Leftrightarrow \dfrac{\ln 10}{\sqrt{10}}$ и $\dfrac{\ln 11}{\sqrt{11}}$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}(2 - lnx)$

$x_0 = e^2$ — точка максимума, на $(e^2; +\infty)$ $f \downdownarrows \Rightarrow f(10) > f(11)$.

Ввести функцию

Сравните числа

$10^{\sqrt{11}}$ и $11^{\sqrt{10}}$

То же самое, что сравнить числа

$$\sqrt{11}\ln 10 \text{ и } \sqrt{10}\ln 11 \Leftrightarrow \frac{\ln 10}{\sqrt{10}} \text{ и } \frac{\ln 11}{\sqrt{11}}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}(2 - lnx)$$

$x_0 = e^2$ — точка максимума, на $(e^2; +\infty)$ $f \downdownarrows \Rightarrow f(10) > f(11)$.

Ввести функцию

Сравните числа

$10^{\sqrt{11}}$ и $11^{\sqrt{10}}$

То же самое, что сравнить числа

$\sqrt{11}\ln 10$ и $\sqrt{10}\ln 11 \Leftrightarrow \dfrac{\ln 10}{\sqrt{10}}$ и $\dfrac{\ln 11}{\sqrt{11}}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}(2 - lnx)$$

$x_0 = e^2$ — точка максимума, на $(e^2; +\infty)$ $f \downdownarrows \Rightarrow f(10) > f(11)$.

Ввести функцию

Сравните числа

$7^{\sqrt{8}}$ и $8^{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \dfrac{\ln 7}{\sqrt{7}}$ и $\dfrac{\ln 8}{\sqrt{8}}$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, но $7 < e^2 < 8$ — по разные стороны от точки максимума

$g(x) = \dfrac{\ln x^2}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$ (при $x > 0$) $(g(x)/2)' = \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)$

$g(x) \downdownarrows$ на $(e; +\infty) \Rightarrow g(7) > g(8)$.

Ввести функцию

Сравните числа

$7^{\sqrt{8}}$ и $8^{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \dfrac{\ln 7}{\sqrt{7}}$ и $\dfrac{\ln 8}{\sqrt{8}}$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, но $7 < e^2 < 8$ — по разные стороны от точки максимума

$g(x) = \dfrac{\ln x^2}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$ (при $x > 0$) $(g(x)/2)' = \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)$

$g(x) \downdownarrows$ на $(e; +\infty) \Rightarrow g(7) > g(8)$.

Ввести функцию

Сравните числа

$7^{\sqrt{8}}$ и $8^{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \dfrac{\ln 7}{\sqrt{7}}$ и $\dfrac{\ln 8}{\sqrt{8}}$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, но $7 < e^2 < 8$ — по разные стороны от точки максимума

$g(x) = \dfrac{\ln x^2}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$ (при $x > 0$) $(g(x)/2)' = \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)$

$g(x) \downdownarrows$ на $(e; +\infty) \Rightarrow g(7) > g(8)$.

Ввести функцию

Сравните числа

$7^{\sqrt{8}}$ и $8^{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \dfrac{\ln 7}{\sqrt{7}}$ и $\dfrac{\ln 8}{\sqrt{8}}$

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, но $7 < e^2 < 8$ — по разные стороны от точки максимума

$g(x) = \dfrac{\ln x^2}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$ (при $x > 0$) $(g(x)/2)' = \dfrac{1}{x^2}(1 - \ln x)$

$g(x) \downdownarrows$ на $(e; +\infty) \Rightarrow g(7) > g(8)$.

Спасибо за внимание!