

**Вариант 16-07-2014-1**  
**вступительный экзамен по математике**  
**для поступающих в магистратуру**  
**механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова**  
**по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,**  
**«Механика и математическое моделирование»**  
**2014 год**

1. Ответьте на следующие вопросы:

а) можно ли утверждать, что произведение  $F(x) = f(x)g(x)$  не имеет производной в точке  $x_0$ , если функция  $f(x)$  имеет производную в  $x_0$ , а функция  $g(x)$  не имеет производной в этой точке?

б) что можно сказать о дифференцируемости функции  $F(x) = f(g(x))$  в точке  $x_0$ , если функция  $f(y)$  имеет производную в точке  $g(x_0)$ , а функция  $g(x)$  не имеет производной в точке  $x_0$ ?

2. Является ли аналитической функция  $f(z) = \cos x + i \sin y$ , где  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ?

3. Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

4. Найдите все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$$

и исследуйте их на устойчивость.

5. Определите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$$

6. Эллипс, имеющий фокусы в точках  $F_1(-3;0)$  и  $F_2(3;0)$ , касается прямой  $x + y - 5 = 0$ . Составьте каноническое уравнение эллипса.

7. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 6)^2 + (y - 12)^2 = 4, \\ (x + 1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

8. Решите в целых числах уравнение

$$2x^2 - 12xy + 19y^2 = 132.$$