

Вариант 16-07-2014-2
вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2014 год

1. Ответьте на следующие вопросы:

а) можно ли утверждать, что произведение $F(x) = f(x)g(x)$ не имеет производной в точке x_0 , если функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в этой точке?

б) что можно сказать о дифференцируемости функции $F(x) = f(g(x))$ в точке x_0 , если функция $f(y)$ не имеет производной в точке $g(x_0)$, а функция $g(x)$ имеет производную в точке x_0 ?

2. Является ли аналитической функция $f(z) = y^2 + ix^2$, где $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$?

3. Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

4. Найдите все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 1 + y^2 - x \end{cases}$$

и исследуйте их на устойчивость.

5. Исследуйте на сходимость степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$$

6. Гипербола, проходящая через точку $M(24, 5)$, имеет асимптоты $y = \pm \frac{5}{12}x$. Составьте каноническое уравнение гиперболы.

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

8. Решите в целых числах уравнение

$$2x^2 + 3xy + 3y^2 = 2x + 6y.$$