

Вариант 21-07-2014-3
вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2014 год

1. Что можно сказать о дифференцируемости функции $F(x) = f(g(x))$ в данной точке x_0 , если функция $f(y)$ не имеет производной в точке $g(x_0)$ и функция $g(x)$ не имеет производной в точке x_0 ?

2. Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right).$$

3. Найдите вычет функции комплексного переменного $f(z) = \operatorname{ctg}(z^2)$ в точке $z = 0$.

4. Найдите все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1), \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

и исследуйте их на устойчивость.

5. Определите область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

6. Составьте уравнения касательных к гиперболе

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1,$$

проходящих через точку $M(1; 4)$.

7. Найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$\log_2(a^2 x^3 - 5a^2 x^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{a^2+2}(3 - \sqrt{x-1})$$

при любом значении параметра a .

8. Решите в целых числах уравнение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$