

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2015 год

Вариант 2015-07-15-1

1. Пусть последовательность x_n ($n = 1, 2, \dots$) сходится, а последовательность y_n ($n = 1, 2, \dots$) расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей:

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$?

Приведите соответствующие примеры.

2. Найдите наименьший модуль комплексного числа, удовлетворяющего условию

$$|z + \sqrt{3}| = |z - i|.$$

3. Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

4. Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + 4x = 0$$

нарисуйте траектории на фазовой плоскости, укажите направление движения. По рисунку сделайте вывод о поведении решений при $t \rightarrow +\infty$.

5. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

6. Вычислите определитель порядка $2n$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

7. Можно ли утверждать, что две случайные величины x и y зависимы, если они коррелированы? Ответ поясните.

8. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 6x + 25} + \sqrt{x^2 - 10x + 29}$.

9. Решите в натуральных числах уравнение

$$4x^2 + 12xy + 5y^2 = 2015.$$