

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2015 год

Вариант 2015-07-15-2

1. Пусть последовательности x_n и y_n ($n = 1, 2, \dots$) расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности:
- а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$
- также расходятся? Приведите соответствующие примеры.

2. Из всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} = 41$, найдите такие, для которых сумма $|z - 9| + |z - 9i|$ принимает наименьшее значение.

3. Найдите предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^4}.$$

4. Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - x = 0$$

нарисуйте траектории на фазовой плоскости, укажите направление движения. По рисунку сделайте вывод о поведении решений при $t \rightarrow +\infty$.

5. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

6. Вычислите определитель порядка $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

7. Можно ли утверждать, что две случайные величины x и y коррелированы, если они зависимы? Ответ поясните.

8. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 16x + 73}$.

9. Решите в целых числах уравнение

$$2^x - 2^y - 1 = 2015.$$