

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлению «Механика и математическое моделирование»
2015 год
Вариант 2015-08-04-4

1. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

и $y_n, n = 1, 2, \dots$ – произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0?$$

Ответ поясните.

2. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} \frac{2}{\bar{z} + 1} < 1.$$

3. Вычислите значение производной функции

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

при значении независимой переменной $x = \pi/2$.

4. Для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} = 1$$

изобразите траектории на фазовой плоскости, укажите направление движения. По рисунку сделайте вывод о поведении решений при $t \rightarrow +\infty$.

5. Вычислите сумму ряда

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

6. Вычислите определитель порядка $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Компоненты случайных векторов $x = (x_1, x_2)^T$ и $y = (y_1, y_2)^T$ связаны преобразованием вращения:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \\ y_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha, \end{cases} \quad M[\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{x}^T] = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

При каком значении α компоненты вектора y будут некоррелированы?

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 4 \sin z)^2 + (y + 4 \cos z)^2 = 1, \\ |x| + |y| = a. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$.

9. Решите в целых числах уравнение

$$3^x = y^2 + 1.$$