

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2015 год
Вариант 2015-08-29-5

1. Существует ли предел последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n = \frac{\sin n}{n} ?$$

Если существует, то чему он равен?

2. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Im} \frac{2}{\bar{z} - 1} \leq -1.$$

3. Вычислите значение производной функции

$$f(x) = \cos^2 3x$$

при значении независимой переменной $x = \pi/12$.

4. Решите дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

5. Исследуйте ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

на сходимость.

6. Вычислите определитель порядка $n \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Компоненты векторов $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $y = (y_1, y_2)^T$ связаны преобразованием:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_1 - 2x_2 + x_3, \end{cases} \quad M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}^T] = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overset{\circ}{x} = x - M[x].$$

Определите момент корреляции $K_{y_1 y_2}$.

8. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

9. Может ли произведение всех цифр десятичной записи натурального числа равняться 2015?