

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Механика и
математическое моделирование»
2016 год

Вариант 2016-06-23

1. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}.$$

2. Постройте график функции $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

Для построения графика необходимо 1) определить область существования этой функции и исследовать поведение функции в граничных точках области существования функции, 2) выяснить симметрию графика и периодичность, 3) найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности, 4) определить нули функции и области постоянства знака, 5) найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции, 6) определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости определенного знака графика функции, 7) найти асимптоты в случае существования таковых.

3. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} |z - 1 - i| \leq |z + 1 + i|, \\ |z - 3i| \leq \sqrt{5}, \end{cases}$$

где z – комплексная переменная, i – мнимая единица.

4. Вычислите определенный интеграл:

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx.$$

Указание: примените формулу интегрирования по частям.

5. Найдите координаты центра и радиус сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z = 0.$$

6. Решите дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 4xe^x.$$

7. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{5-2x} - \sqrt{1-2x}$.

8. Семья, состоящая из четырех человек: папа, мама, ребенок и бабушка, подошла ночью к мосту через ущелье. У них есть один фонарик, и передвигаться по мосту без фонарика нельзя. Папа может пройти мост за 1 минуту, мама – за 2 минуты, ребенок – за 5 минут и бабушка – за 10 минут. Мост может выдержать только двоих человек одновременно. Когда двое идут по мосту, они идут с минимальной из их скоростей. Перебрасывать фонарик через ущелье нельзя, также нельзя брать на руки другого члена семьи. Сможет ли семья перейти мост за 17 минут?