

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2016 год

Вариант 2016-07-12-1

1. Исследуйте на сходимость последовательность

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

2. Постройте фазовый портрет системы, описываемой уравнением $\ddot{x} - x = 1$.
3. Множество точек комплексной плоскости удовлетворяет условию $|z - 3 - 4i| \leq 1$, где z – комплексная переменная, i – мнимая единица. В каких пределах может изменяться отношение $\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$?
4. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x^3 + x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

Указание: примените метод неопределенных коэффициентов.

5. Определите геометрическое место хорд сферы

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 25,$$

делящихся точкой $M(3, 5, 1)$ пополам.

6. Найдите все значения параметра q , при которых векторы

$$\bar{a}_1 = (2 + q, 2, -6); \quad \bar{a}_2 = (3, 1, -3); \quad \bar{a}_3 = (1, 2, 2 + q)$$

линейно независимы.

7. В шар радиуса R вписан цилиндр максимального объема. Найдите этот объём.

8. Решите уравнение

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

в целых числах.