

Вступительный экзамен по математике  
для поступающих в магистратуру  
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова  
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,  
«Механика и математическое моделирование»  
2016 год

**Вариант 2016-07-12-2**

1. Исследуйте на сходимость последовательность

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}.$$

2. Постройте фазовый портрет системы, описываемой уравнением  $\ddot{x} - \dot{x} = 1$ .

3. Множество точек комплексной плоскости удовлетворяет условию  $|z - 3 + 2i| \leq 1$ , где  $z$  – комплексная переменная,  $i$  – мнимая единица. В каких пределах может изменяться отношение  $\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$ ?

4. Вычислите неопределенный интеграл:

$$\int \frac{3x + 1}{(x + 3)^2(x - 5)} dx.$$

*Указание: примените метод неопределенных коэффициентов.*

5. На прямой, проходящей через начало координат и точку  $(1, 1, 1)$ , найдите такую точку, касательные из которой к сферам

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 1,$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 6)^2 = 2$$

равны.

6. Найдите все значения параметра  $q$ , при которых векторы

$$\bar{a}_1 = (3 + q, 3, -6); \quad \bar{a}_2 = (3, 1, -2); \quad \bar{a}_3 = (2, 1, 2 + q);$$

линейно независимы.

7. В шар радиуса  $R$  вписан цилиндр с максимальной площадью полной поверхности. Найдите эту площадь.

8. Решите уравнение

$$x^2 + y^2 + x^2 = x^2 y^2$$

в целых числах.