

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,
«Механика и математическое моделирование»
2016 год

Вариант 2016-08-11

1. Найдите область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}.$$

2. При каких a и b все решения дифференциального уравнения $y'' + ay' + by = 0$ удовлетворяют соотношению $y = o(e^{-x})$ при $x \rightarrow +\infty$?
3. Множество K всех точек z_1 комплексной плоскости задается условием

$$|-z_1 i - 2i\sqrt{2}| = 1,$$

где i – мнимая единица. L – множество всех точек z_2 , имеющих вид $z_2 = -z_1 i$.
Найдите расстояние между множествами K и L .

4. Вычислите площадь находящейся в первом квадранте плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4 - x^2, \quad y = 3x, \quad y = 0.$$

5. Составьте уравнение сферы, проходящей через окружность

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49, \quad 2x + 2y - z + 4 = 0$$

и начало координат.

6. Вычислите ранг матрицы Q для всех значений параметра q

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & q+1 \\ 1 & q & 1 & 2 \\ 1 & 5 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

7. В гладкую чашу, имеющую форму полусферы радиуса r , опущен тонкий стержень длины $L > 2r$. Найдите положение равновесия стержня.
8. Существуют ли значения $n \in \mathbb{N}$, при котором числа

$$2^{n+1} - 1 \quad \text{и} \quad 2^{n-1}(2^n - 1)$$

одновременно являются кубами целых чисел?