

Вступительный экзамен по математике  
для поступающих в магистратуру  
механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова  
по направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки»,  
«Механика и математическое моделирование»  
2017 год

**Вариант 2017-06-21**

1. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}.$$

2. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$$

3. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию

$$\frac{|z + 2i|}{|z - i|} \geq 2,$$

где  $z$  – комплексная переменная,  $i$  – мнимая единица.

4. Вычислите объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной гиперболой  $y = \frac{4}{x}$ , осью абсцисс, и прямыми  $x = 1$  и  $x = 4$ .
5. Определите координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0, \quad 2x + 2y + z + 1 = 0.$$

6. Вычислите ранг матрицы  $Q$  для всех значений параметра  $q$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 + q & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 + q \end{pmatrix}.$$

7. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол  $\alpha$ . При каком значении угла  $\alpha$  объем пирамиды является наибольшим?