

**Вариант 111**  
**вступительный экзамен по МАТЕМАТИКЕ**  
**для поступающих в магистратуру**  
**механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова**  
**по направлениям «Математика» и «Математика и компьютерные науки»**

1. Найдите предел последовательности и доказать  $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2^2}, 1\frac{1}{2^3}, \dots, 1\frac{1}{2^n}, \dots$

2. Вычислите производную функции  $u(x) = (\ln x)^{\arctg x}$

3. Вычислите интеграл

$$\int \frac{9x^3 + 25x^2 + 14x + 16}{(x+1)(x-2)(3x^2 + 2x + 2)} dx.$$

4. При каких значениях действительных параметров  $a$  и  $b$ . функция  $y = e^{-x}$  является устойчивым по Ляпунову решением дифференциального уравнения  $y''' + ay'' + by' + y = 0$ , но не является асимптотически устойчивым?

5. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно

$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n > 2.$$

6. Исследуйте на сходимость и на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{n+x+1} \arctg\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)$$

а) на  $E_1 = (0; 1)$ ;

б) на  $E_2 = (1; +\infty)$ .

7. Пусть  $A = (a_{ij})$  матрица  $n \times n$  ранга  $n - 1$ . Найдите ранг матрицы  $\tilde{A} = (A_{ij})$ , составленной из алгебраических дополнений до элементов  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .