

Вариант 114
вступительный экзамен по МЕХАНИКЕ
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
по направлению «Механика и математическое моделирование»

1. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

2. Вычислите зависимость скорости материальной точки от времени, движущейся вдоль прямой по закону $x(t) = \ln(\cos^2 t + \sqrt{1 + \cos^4 t})$.

3. Вычислите интеграл

$$\int \sin x e^{2x} dx.$$

4. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$$

5. Найдите все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1^2 + y_2, \\ \dot{y}_2 = -\ln(1 - y_1 + y_1^2) + \ln 3. \end{cases}$$

Определите, какие устойчивы, а какие нет.

6. Шарик массой 10 г падает с большой высоты без начальной скорости. Численное значение силы сопротивления среды в ньютонах определяется формулой $|F| = 10^{-3}V^2$, где V — значение модуля скорости тела в метрах в секунду. Вычислите приближенно, за какое время шарик пройдет первый сантиметр и первый километр пути? Принимаемые предположения обоснуйте.
7. Отрезок массы m и длины $2l$ подвешен за концы на невесомых нитях с длинами a и b в однородном поле тяжести так, что в положении равновесия нити вертикальны (см. рис.). Найдите частоту малых колебаний отрезка около положения равновесия в вертикальной плоскости.

