

Вариант 115
вступительный экзамен по МЕХАНИКЕ
для поступающих в магистратуру
механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова
по направлению «Механика и математическое моделирование»

1. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right).$$

2. Вычислите зависимость скорости материальной точки от времени, движущейся вдоль прямой по закону

$$x(t) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2.$$

3. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}.$$

4. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

5. Найдите все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \ln(2 - y_2^2), \\ \dot{y}_2 = e^{y_1} - e^{y_2}. \end{cases}$$

Определите, какие устойчивы, а какие нет.

6. На нити, перекинутой через блок, подвешены два груза различных масс m_1 и m_2 . Найдите ускорение центра масс этой системы. Массами блока и нити можно пренебречь.
7. В сплошном цилиндре радиуса R параллельно его оси на расстоянии $R/2$ от нее просверлено круглое отверстие радиуса $R/2$. Цилиндр лежит на доске, которую медленно поднимают за один конец. Найдите предельное значение угла наклона доски, при котором цилиндр еще будет находиться в равновесии, при условии, что коэффициент трения цилиндра о доску равен $k = 0,2$.