

Экзамен по направлению "Математика"
для поступающих в магистратуру

Вариант 01
2017 год

1. Найдите все предельные точки последовательности

$$x_n = \cos \frac{\pi n}{2} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \frac{x^2 y - 4x - 4xy + 16}{\sqrt{8-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

3. Найдите множество сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Определите тип кривой второго порядка, заданной в полярных координатах уравнением

$$r \sin^2(\varphi/2) = 1.$$

5. Вычислите интеграл

$$\int_{|z-1|=2} \frac{\operatorname{tg} z}{z} dz, \quad z \in \mathbb{C}$$

(окружность $|z-1|=2$ ориентирована против часовой стрелки).

6. Найдите коэффициенты разложения вектора \vec{x} по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, если $\vec{x} = (0, 0, 1)$, $\vec{e}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{e}_3 = (1, 1, 0)$.

7. Функция $x(t)$ задана на отрезке $[0, T]$ условиями

$$x'' + x = u, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x(T) = 0,$$

где u — константа. При каком значении параметра $u \in [-1, 1]$ величина $T > 0$ будет минимальной?

8. Точки A и B движутся с постоянными (различными) скоростями по окружностям, образованным пересечением сферы радиуса 1 с плоскостями α и β соответственно. Известно, что обе плоскости проходят через центр сферы и перпендикулярны друг другу. Какое наибольшее значение может принимать длина вектора \overline{AB} , если в начальный момент времени $A = B$, точка A делает полный оборот за время $t = 2/3$, а точка B — за время $t = 2$?