

Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 02

2017 год

1. Найдите все предельные точки последовательности

$$x_n = \sin \frac{\pi n}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \frac{3y^2x + 6xy - 4y - 8}{\sqrt{4+x}} = 0, \\ x = ay \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

3. Найдите множество сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{x^{2n} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Определите тип кривой второго порядка, заданной в полярных координатах уравнением

$$r^2(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi + 2) = 8.$$

5. Вычислите интеграл

$$\int_{|z+1|=3} z \operatorname{ctg} z \, dz, \quad z \in \mathbb{C}$$

(окружность $|z+1|=3$ ориентирована против часовой стрелки).

6. Найдите коэффициенты разложения вектора \vec{x} по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, если $\vec{x} = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, -1)$, $\vec{e}_3 = (-1, 1, 0)$.

7. Функция $x(t)$ задана на отрезке $[0, T]$ условиями

$$x'' - x + u = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x(T) = 0,$$

где u — константа. При каком значении параметра $u \in [0, 2]$ величина $T > 0$ будет минимальной?

8. Точки A и B движутся с постоянными (различными) скоростями по окружностям, образованным пересечением сферы радиуса 1 с плоскостями α и β соответственно. Известно, что обе плоскости проходят через центр сферы и перпендикулярны друг другу. Какое наименьшее значение может принимать длина вектора \overrightarrow{AB} , если в начальный момент времени это расстояние равно 2, точка A делает полный оборот за время $t = 1$, а точка B — за время $t = 1/3$?