

# Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 03

2017 год

1. Найдите верхний предел  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  и нижний предел  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  последовательности

$$x_n = \cos \frac{\pi n}{3} + \frac{\sqrt{4n^2 - 2}}{n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. При каком значении параметра  $a$  вектор  $\vec{l}\{3 + a, 2a\}$  сонаправлен с вектором  $\overrightarrow{BL}$ , где  $B(-1, -1)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $C(2, -7)$ ,  $BL$  — биссектриса угла  $ABC$ ?

3. Найдите все точки  $\lambda \in \mathbb{R}$ , при которых определено классическое преобразование

Фурье  $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$  функции

$$f(x) = \frac{e^{3ix}}{\sqrt[4]{x^4 + 2}}.$$

4. Напишите уравнение касательной прямой в точке  $M(1, 1)$  к кривой, заданной на плоскости  $\mathbb{R}^2$  уравнением

$$x^3 + y^3 + xy = 3.$$

5. Выпишите ряд Лорана  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$  функции

$$w = \frac{1}{z^2 + 2z}$$

комплексного переменного  $z$ , сходящийся в точке  $z_0 = 3$ .

6. Найдите матрицу  $X$  такую, что  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

7. Функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  заданы при  $t \geq 0$  условиями

$$\begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = 2x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Найдите все пары вещественных чисел  $(x_0, y_0)$ , при которых обе функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют конечные пределы  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  и  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ .

8. Домик состоит из прямого кругового цилиндра с радиусом  $3x$  и высотой  $y$  и крыши, имеющей форму прямого кругового конуса с радиусом  $3x$  и высотой  $4x$ . Необходимо спроектировать домик общего объема  $V = 48\pi \text{ м}^3$  при условии  $y \geq 4x$ , имеющий минимальную площадь боковой поверхности (поверхность, составленная из боковой поверхности цилиндра и боковой поверхности конуса). Найдите значения параметров  $x$  и  $y$ .

