

Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 04

2017 год

1. Найдите верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ и нижний предел $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ последовательности

$$x_n = \sin \frac{\pi n}{4} + \frac{\sqrt{9n^2 - 5}}{n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. При каком значении параметра a вектор $\vec{l}\{3a, 2 - a\}$ сонаправлен с вектором \vec{BL} , где $B(2, 2)$, $A(0, 6)$, $C(8, 5)$, BL — биссектриса угла ABC ?

3. Найдите все точки $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых определено классическое преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$ функции

$$f(x) = \frac{e^{2ix}}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

4. Напишите уравнение касательной прямой в точке $M(-1, -1)$ к кривой, заданной на плоскости \mathbb{R}^2 уравнением

$$x^3 + y^3 - xy = -3.$$

5. Выпишите ряд Лорана $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ функции

$$w = \frac{1}{z^3 - 3z^2}$$

комплексного переменного z , сходящийся в точке $z_0 = 4$.

6. Найдите матрицу X такую, что $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

7. Функции $x(t)$, $y(t)$ заданы при $t \leq 0$ условиями

$$\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = -y + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Найдите все пары вещественных чисел (x_0, y_0) , при которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные пределы $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ и $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$.

8. Домик состоит из прямого кругового цилиндра с радиусом x и высотой y и крыши, имеющей форму полусферы с радиусом x . Необходимо спроектировать домик общего объема $V = 45\pi \text{ м}^3$ при условии $y \geq x$, имеющий минимальную площадь боковой поверхности (поверхность, составленная из боковой поверхности цилиндра и полусферы). Найдите значения параметров x и y .

