

Экзамен по направлению "Математика"

для поступающих в магистратуру

Вариант 05

2017 год

1. Найдите верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ и нижний предел $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ последовательности

$$x_n = \operatorname{tg} \frac{\pi + 2\pi n}{4} - \frac{3n - 1}{\sqrt{n^2 + 2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. При каком значении параметра a вектор $\vec{l}\{2a, a - 4\}$ сонаправлен с вектором \vec{BL} , где $B(1, 1)$, $A(-1, -2)$, $C(7, -3)$, BL — биссектриса угла ABC ?

3. Найдите все точки $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых определено классическое преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$ функции

$$f(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt[6]{x^6 + 3}}.$$

4. Напишите уравнение касательной прямой в точке $M(1, -1)$ к кривой, заданной на плоскости \mathbb{R}^2 уравнением

$$y^3 - x^3 + xy = -3.$$

5. Выпишите ряд Лорана $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ функции

$$w = \frac{z^2}{z - 4}$$

комплексного переменного z , сходящийся в точке $z_0 = -8$.

6. Найдите матрицу X такую, что $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Функции $x(t)$, $y(t)$ заданы при $t \leq 0$ условиями

$$\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 2y + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Найдите все пары вещественных чисел (x_0, y_0) , при которых обе функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют конечные пределы $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

8. Домик состоит из прямой правильной четырехугольной призмы со стороной основания $3x$ и высотой y и крыши, имеющей форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой $2x$. Необходимо спроектировать домик общего объема $V = 264 \text{ м}^3$ при условии $y \geq 3x$, имеющий минимальную площадь боковой поверхности (поверхность, составленная из боковых поверхностей призмы и пирамиды). Найдите значения параметров x и y .

